COUPLAGES DEFORMATIONS/TRANSPORT DANS UN MILIEU BI-CONSTITUANT ELASTIQUE

CHERBLANC Fabien, MRANI Ibrahim, RICHEFEU Vincent, EL YOUSSOUFI Moulay Saïd, FRAS Gilles, BÉNET Jean-Claude

L.M.G.C. Cc 48, Université Montpellier 2,
Place Eugène Bataillon, 34095 Montpellier Cedex 5

RESUME

Un modèle phénoménologique est développé pour décrire le transport d'eau dans un matériau bi-constituant élastique isotrope. La relation de transport fait apparaître deux mécanismes, le premier dépendant du gradient de teneur en eau, le deuxième relatif au gradient de déformation. Dans le cas d'une plaque infinie, cette relation peut s'écrire sous la forme d'une loi de Fick. Le coefficient de transport apparent dépend alors des caractéristiques hygroscopiques et rhéologiques du milieu. Une étude expérimentale sur des plaques de gel d'Agar a permis de déduire le coefficient de transport apparent et d'identifier les coefficients de transport intrinsèques. Ce modèle est ensuite validé dans le cas de la déshydratation osmotique d'une plaque cylindrique de gel. Une extension de ce modèle, prenant en compte les phénomènes osmotiques, est ensuite proposée afin de décrire l'influence de la pénétration d'un soluté dans le matériau.
Mots clés : transport d'eau, déformations, gel d'Agar, couplages.

ABSTRACT

COUPLING BETWEEN STRAINS AND TRANSPORT IN A BICONSTITUENT ELASTIC MEDIUM

A phenomenological equation is established for water transport in a biconstituent, isotropic and elastic medium. This relation includes a term related to the water content gradient and a term related to the deformation gradient. It is shown that in the case of an infinite plate, the transport law is similar to Fick's law. The apparent transport coefficient depends on the hygroscopic and rheological characteristics of the medium. Experimental analysis on Agar gel plates leads to the determination of the apparent transport coefficient and to the identification of the intrinsic transport coefficients. This model is then validated in the case of osmotic dehydration of cylindrical an Agar gel plate. This model is then extended in order to take into account osmotic phenomena and to describe the influence of a solute constituent penetrating in the medium.
Keywords : *water transport, deformations, Agar gel, coupled phenomena.*

---

1. INTRODUCTION

Dans certains milieux hétérogènes tels que les gels ou les bio-polymères, les transferts en phase liquide (solvant, soluté) peuvent s'accompagner de déformations importantes. Ces déformations, reliées à des contraintes internes, modifient les propriétés de transport. Dans cette situation, on peut considérer qu'il y a interaction entre l'état de contraintes et les mécanismes de transport. Dans le cas du caoutchouc naturel, les variations du coefficient de transport en fonction de la teneur en eau sont restées inexpliquées ; l'hypothèse du couplage avec les déformations avait déjà été proposée (AURIA et BÉNET, 1990).

2. MODELE PHENOMENOLOGIQUE HYGROMECANIQUE

2.1. Relations générales dans le cas élastique

En considérant un milieu bi-phasique (solide + liquide) déformable dans des conditions quasi-statiques et isothermes, la Thermodynamique des Processus Irréversibles linéaire conduit à l'équation de transport suivante (MRANI et al., 1995) :

$$\mathbf{J} = \rho_e(\mathbf{u} - \mathbf{v}) = -\frac{L}{T}\nabla\mu_e \qquad (1)$$

Le flux de matière **J** s'exprime comme un mouvement relatif à partir des vitesses des phases solide **v**, et liquide **u** ; ρ_e est la masse volumique apparente de la phase liquide, T est la température, μ_e est le potentiel chimique massique de l'eau et L est le coefficient phénoménologique de transport.
Pour décrire l'état local du système, les variables d'état sont la teneur en eau w, et le tenseur des déformations du squelette solide $\boldsymbol{\varepsilon}$. En développant au second ordre le potentiel énergie libre autour d'un état de référence (w^0,$\varepsilon_{ij}^{\ 0}$) (COUSSY, 1991), il est possible d'exprimer les incréments de potentiel chimique de l'eau μ_e, et du tenseur des contraintes $\boldsymbol{\sigma}$ en fonction des variations infinitésimales des variables d'état w et $\boldsymbol{\varepsilon}$:

$$\Delta\mu_e = \frac{d_w}{\rho_s}\Delta w - \frac{3K\beta}{\rho_s}\Delta tr\boldsymbol{\varepsilon} \qquad (2)$$

$$\Delta\sigma_{ij} = \lambda\Delta tr\boldsymbol{\varepsilon}\delta_{ij} + 2\mu\Delta\varepsilon_{ij} - 3K\beta\Delta w\delta_{ij} \qquad (3)$$

où ρ_s est la masse volumique apparente de la phase solide, K le coefficient de compressibilité de l'ensemble du milieu, $tr\boldsymbol{\varepsilon}$ la trace du tenseur des déformations, δ_{ij} le symbole de Kronecker, λ et μ les coefficients de Lamé. Ces expressions font apparaître deux coefficients ; le premier d_w, lié à l'hygroscopicité du milieu, et le second β, appelé coefficient d'expansion hydrique :

$$d_w = \rho_s\left(\frac{\partial\mu_e}{\partial w}\right)_\varepsilon \quad ; \quad 3K\beta = -\left(\frac{\partial\sigma_{ii}}{\partial w}\right)_\varepsilon \qquad (4)$$

En utilisant l'équation 2, la relation de transport (Eq. 1) devient :

$$\mathbf{J} = -D_w\nabla w + D_\varepsilon\nabla tr\varepsilon \qquad (5)$$

On voit clairement l'influence de deux mécanismes distincts sur le transport d'eau. Le premier, classique, résultant du gradient de teneur en eau, le second, généralement non

pris en compte, est relatif au gradient de déformation. Les coefficients de transport D_w et D_ε sont liés au coefficient phénoménologique L par les relations suivantes :

$$D_w = L\frac{d_w}{T\rho_s} \qquad ; \qquad D_\varepsilon = L\frac{3K\beta}{T\rho_s} \tag{6}$$

La détermination expérimentale du coefficient d_w nécessite la réalisation d'isothermes de sorption/désorption à déformations constantes, opération délicate à réaliser. On préfère appréhender les isothermes à contraintes constantes en imposant une pression dans l'enceinte de mesure. L'équation 2 peut être réécrite sous la forme :

$$\Delta\mu_e = \frac{d_w^*}{\rho_s}\Delta w - \frac{\beta}{\rho_s}\Delta tr\boldsymbol{\sigma} \tag{7}$$

où le coefficient d_w^* évalué à contraintes constantes est donné par :

$$d_w^* = \rho_s\left(\frac{\partial\mu_e}{\partial w}\right)_\sigma = d_w - 9K\beta^2 \tag{8}$$

2.2. Cas d'une plaque infinie

Pour analyser expérimentalement la relation de transport, le cas simplifié d'une plaque est envisagé. Le milieu étudié est supposé infini dans les directions y et z, et n'est soumis à aucune action mécanique extérieure. Toutes les grandeurs ne dépendent alors plus que de l'abscisse x et du temps t. L'introduction de la relation de comportement (Eq. 3) dans les équations d'équilibre mécanique conduit à :

$$\Delta tr\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1+\nu}{1-\nu}\beta\Delta w \qquad ; \qquad \Delta tr\boldsymbol{\sigma} = -\frac{2E}{1-\nu}\beta\Delta w \tag{9}$$

Dans ces conditions, les variations du potentiel chimique de l'eau (Eq. 7) ne dépendent plus que des incréments de teneur en eau à travers la relation :

$$\Delta\mu_e = \frac{1}{\rho_s}\left[d_w^* + \frac{2E\beta^2}{1-\nu}\right]\Delta w \tag{10}$$

Ainsi, le transport d'eau est décrit par une équation similaire à la loi de Fick :

$$J = -D^*\frac{\partial w}{\partial x} \qquad \text{avec} \qquad D^* = \frac{L}{T\rho_s}\left[d_w^* + \frac{2E\beta^2}{1-\nu}\right] \tag{11}$$

où le coefficient de transport apparent D^* dépend des caractéristiques hygroscopiques (d_w^*) et mécaniques (E, ν, β) du matériau.

3. ETUDE EXPERIMENTALE SUR LE GEL D'AGAR

3.1. Coefficient de transport apparent

Des plaques de gel d'Agar d'épaisseur initiale 15 mm et de teneur en eau initiale w=1000% sont placées dans une solution de polyéthylène glycol à 30°C. La différence de concentration en PEG, entre le milieu et la solution, provoque une déshydratation osmotique accompagnée d'un retrait. Des échantillons sont prélevés à intervalles de temps réguliers, puis découpés en tranches perpendiculaires au sens du transfert. La mesure des teneurs en eau dans chaque tranche permet ainsi de déterminer les gradients de teneur en eau $\partial w/\partial x$ au sein du milieu, et le flux d'eau J. La bonne

linéarité observée entre ces deux grandeurs permet de valider la relation de transport développée dans le cas d'une plaque (Eq. 11) et conduit à la détermination du coefficient de transport apparent D^* **(figure 1)**.

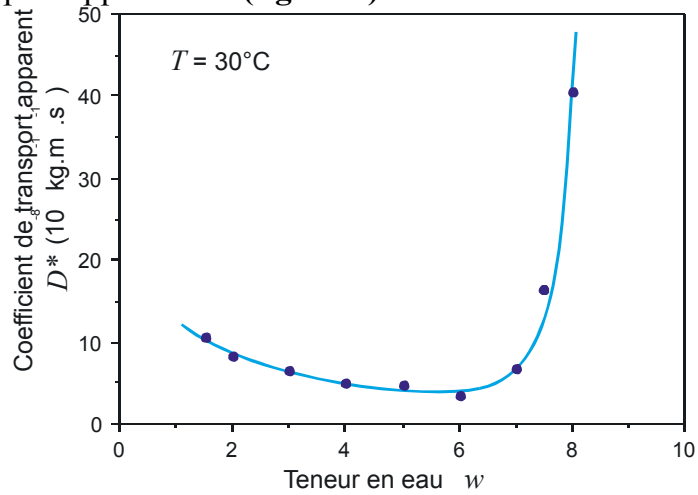


Fig. 1 – Variation du coefficient de transport apparent en fonction de la teneur en eau – ***Variation of apparent transport coefficient according to water content.***

Le coefficient de transport apparent dépend fortement de la teneur en eau et passe par un minimum vers 600%. Des comportements similaires ont déjà été observés pour des milieux bi-phasiques ou tri-phasiques. Cette évolution de D^* met clairement en évidence la superposition de deux mécanismes, et rend nécessaire la mesure des caractéristiques mécaniques pour l'interpréter.
La mesure du module d'élasticité E en fonction de la teneur en eau, fait apparaître une importante augmentation de la rigidité en dessous de $w = 400\%$ (MRANI et al., 1997). Le coefficient d'expansion hydrique β croit aussi rapidement pour les faibles teneurs en eau. Ces deux variations conjuguées entraînent, dans l'équation 11, une augmentation du coefficient de transport apparent lorsque la teneur en eau diminue, et explique ainsi le comportement observé sur la **figure 1**.

3.2. Identification des coefficients de transport intrinsèques

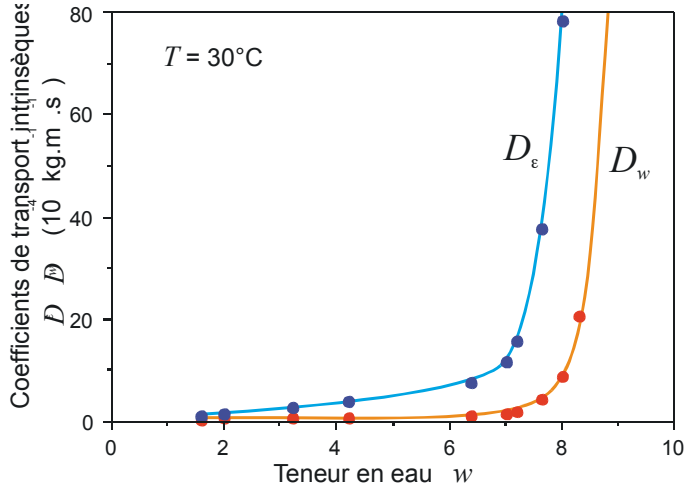


Fig. 2 – Variation des coefficients de transport en fonction de la teneur en eau – ***Variation of transport coefficients according to water content.***

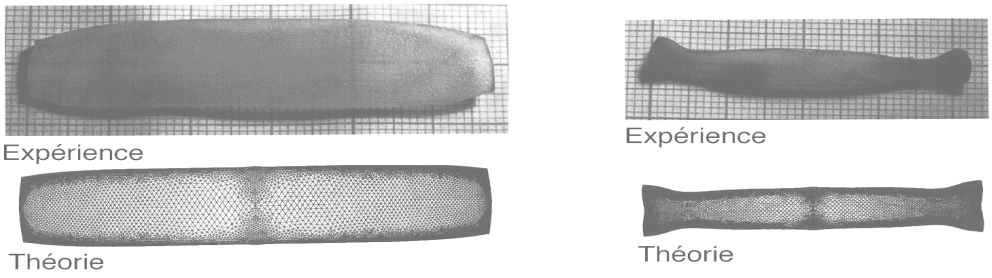
Contrairement au coefficient D^*, les coefficient D_w et D_ε sont intrinsèques au matériau et permettent de décrire les transferts pour une géométrie quelconque. En utilisant les expressions 6 et 11, D_w et D_ε sont donnés par :

$$D_w = \frac{3K\beta}{d_w^* + \frac{2E\beta^2}{1-\nu}} D^* \quad ; \quad D_\varepsilon = \frac{d_w^* + 9K\beta^2}{d_w^* + \frac{2E\beta^2}{1-\nu}} D^* \tag{12}$$

Dans le cas du gel d'Agar, les évolutions de D_w et D_ε sont reportées sur la **figure 2**. Ces coefficients montrent des décroissances monotones et tendent vers 0 pour les faibles teneurs en eau.

3.3. Validation dans le cas de la déshydratation d'un cylindre

Le modèle développé a fait l'objet d'une validation dans le cas d'un cylindre de faible épaisseur de gel d'Agar déshydraté dans une solution de PEG. La **figure 3** représente la section radiale du cylindre dans un état intermédiaire et un état final. Le modèle rend bien compte des résultats expérimentaux, en particulier des inversions de courbure de la surface observées. La concordance est également bonne au niveau des profils de teneur en eau (MRANI et al., 1997).



<u>Fig. 3</u> - Déformée d'un cylindre de gel d'Agar au cours de la déshydratation – ***Deformation by dehydration of an Agar gel cylinder.***

4. COUPLAGES AVEC DES PHENOMENES OSMOTIQUES

Dans le cas où un soluté pénètre dans le milieu, des expériences simples ont permis d'illustrer les couplages entre la composition de la solution et les déformations. Une sphère de gel d'Agar, initialement saturée en eau pure, est plongée dans une solution de PEG à différentes concentrations, puis de différentes tailles de molécules. La **figure 4** donne l'évolution du diamètre de la sphère en fonction de ces deux paramètres. Afin de prendre en compte l'influence de la pénétration du soluté sur les transferts et déformations, une extension du modèle est proposée ici.

Outre la teneur en eau w_e, et le tenseur de déformation du squelette solide $\boldsymbol{\varepsilon}$, le nombre de moles de soluté n_i est choisi comme variable d'état supplémentaire. Une démarche similaire conduit à une équation d'état qui fait apparaître 3 coefficients :

$$d^i_{n_i} = \rho_s M_i \left(\frac{\partial \mu_i}{\partial n_i} \right) \quad \text{et} \quad d^e_{n_i} = -\rho_s m_s \left(\frac{\partial \mu_e}{\partial n_i} \right) \tag{13}$$

qui expriment la dépendance des potentiels chimiques du soluté et de l'eau par rapport à la concentration en soluté, et :

$$d_{\varepsilon}^{i} = \left(\frac{\partial \acute{o}_{ii}}{\partial n_i} \right) \tag{14}$$

qui exprime la variation du tenseur des contraintes résultant d'une variation de concentration en soluté. Sous certaines hypothèses, des expressions analytiques de ces coefficients sont proposées (RICHEFEU et al., 2002) :

$$d_{n_i}^{i} = \rho_s \frac{RT}{n_i} \quad ; \quad d_{n_i}^{e} = \rho_s m_s \frac{M_e}{M_i} \frac{RT}{\left(w_e m_s + M_e n_i\right)} \quad ; \quad d_{\varepsilon}^{i} = \frac{RT}{V}\left(1 - \frac{n_e}{n_e + n_i}\right) \tag{15}$$

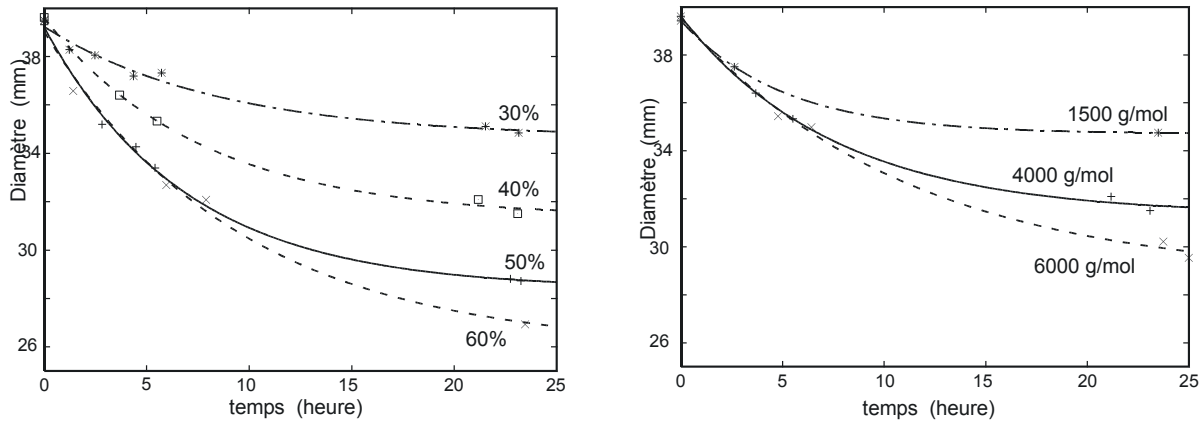


Fig. 4 – Cinétiques de déshydratation d'une sphère de gel d'Agar – ***Dehydration kinetics of a spherical Agar gel sample.***

5. CONCLUSION

Cette étude montre le couplage entre contraintes mécaniques et transport d'eau dans des matériaux fortement déformables. Le flux d'eau est gouverné par le gradient de teneur en eau, mais aussi par le gradient de déformation. La caractérisation expérimentale du gel d'Agar a permis d'identifier les coefficients de transport intrinsèques et de valider le modèle présenté. L'objectif est maintenant de prendre en compte les couplages avec des phénomènes osmotiques et électriques.

RÉFÉRENCES BIBLIOGRAPHIQUES

AURIA R., BÉNET J.C., 1990 – Transport de l'eau dans une feuille de caoutchouc naturel pendant la période de séchage à vitesse décroissante, *Int. J. Heat Mass Transfer, Vol. 33 (9), 1885-1894.*

COUSSY O, 1991 – Mécanique des milieux poreux, *Technip (ed), Paris, France.*

MRANI I., BÉNET J.C., FRAS G., 1995 – Transport of water in a biconstituent elastic medium, *Appl. Mech. Rev., Vol. 48 (10), 717-721.*

MRANI I., BÉNET J.C., FRAS G., ZRIKEM Z., 1997 – Two dimensional simulation of dehydration of a highly deformable gel: moisture content, stress and strain fields, *Drying Technology, Vol. 15 (9), 2165-2193.*

RICHEFEU V., EL YOUSSOUFI M.S., BÉNET J.C., 2002 – Saturated porous medium strain under osmotic actions, *2nd Biot Conf., Grenoble, France, 533-538*.